Analyse Complexe
Deux exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence 1. Pour $n \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

1. Montrer que la suite $(|S_n(z)|^{1/n})_{n\geq 1}$ est uniformément bornée sur tout compact de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si $z \in D$ vérifie $\sum a_k z^k \neq 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} |S_n(z)|^{1/n} = 1$. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\overline{\lim}\ |S_n(z)|^{1/n} \leq 1$, alors $z \in \bar{D}$.
3. () A l'aide du théorème de Montel, en déduire la théorème de Jentzsch : pour tout complexe ω de module 1, il existe une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_k$ et une suite de nombres complexes $(z_k)_k$, telles que pour tout k, z_k est un zéro de S_{n_k}, et que $z_k \to \omega$.

Exercice 2 (*)

Soit f une fonction entière telle que $f \circ f$ n'a pas de point fixe. A l'aide du petit théorème de Picard, montrer que f est une translation.

On pourra considérer la fonction $z \mapsto \frac{f\circ f(z)-z}{f(z)-z}$.